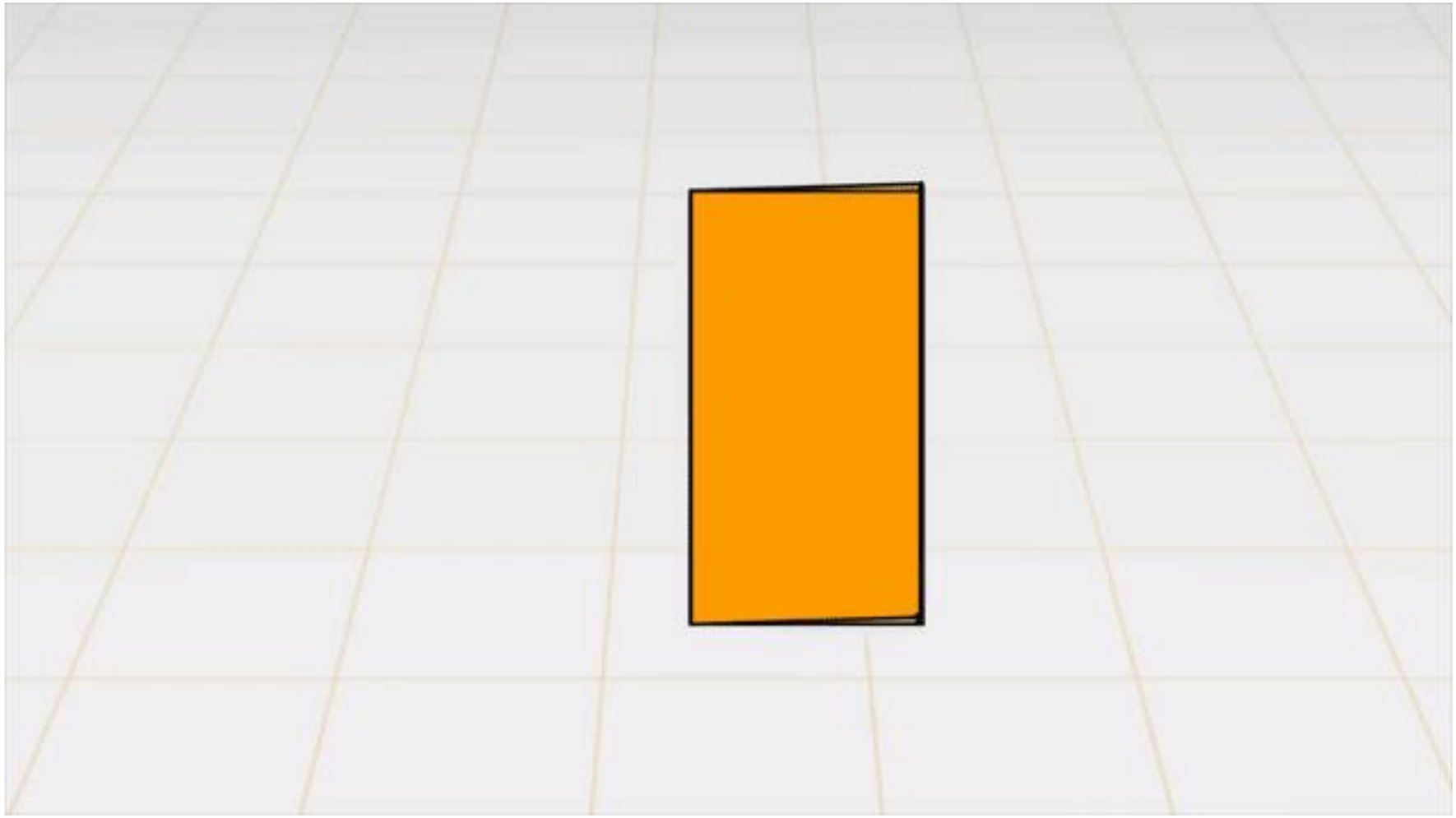
PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

GEOMETRÍA DEL ESPACIO



CILINDRO

TEMA 22: CILINDRO

SUPERFICIE CILÍNDRICA

CILINDRO: DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

CLASIFICACIÓN

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DE UN CILINDRO

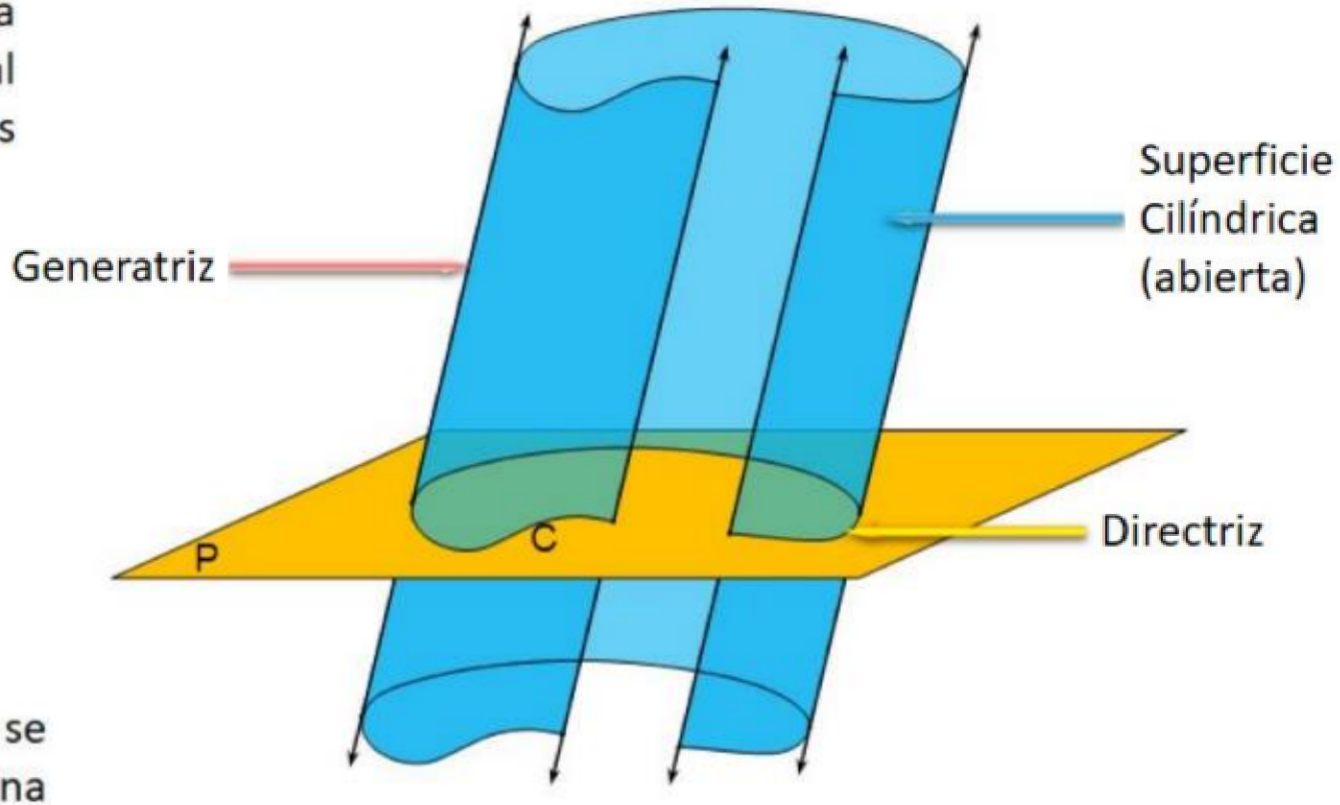
TRONCO DE CILINDRO

PROBLEMAS

CILINDRO

SUPERFICIE CILINDRICA

Definición.- Dadas una recta y una curva simple abierta o cerrada, tal que la recta sea secante al plano que contiene a la curva, se denomina ***superficie cilíndrica*** a la superficie generada por una recta (generatriz) al trasladarse paralelamente a la recta dada, por todos los puntos de la línea curva (directriz).



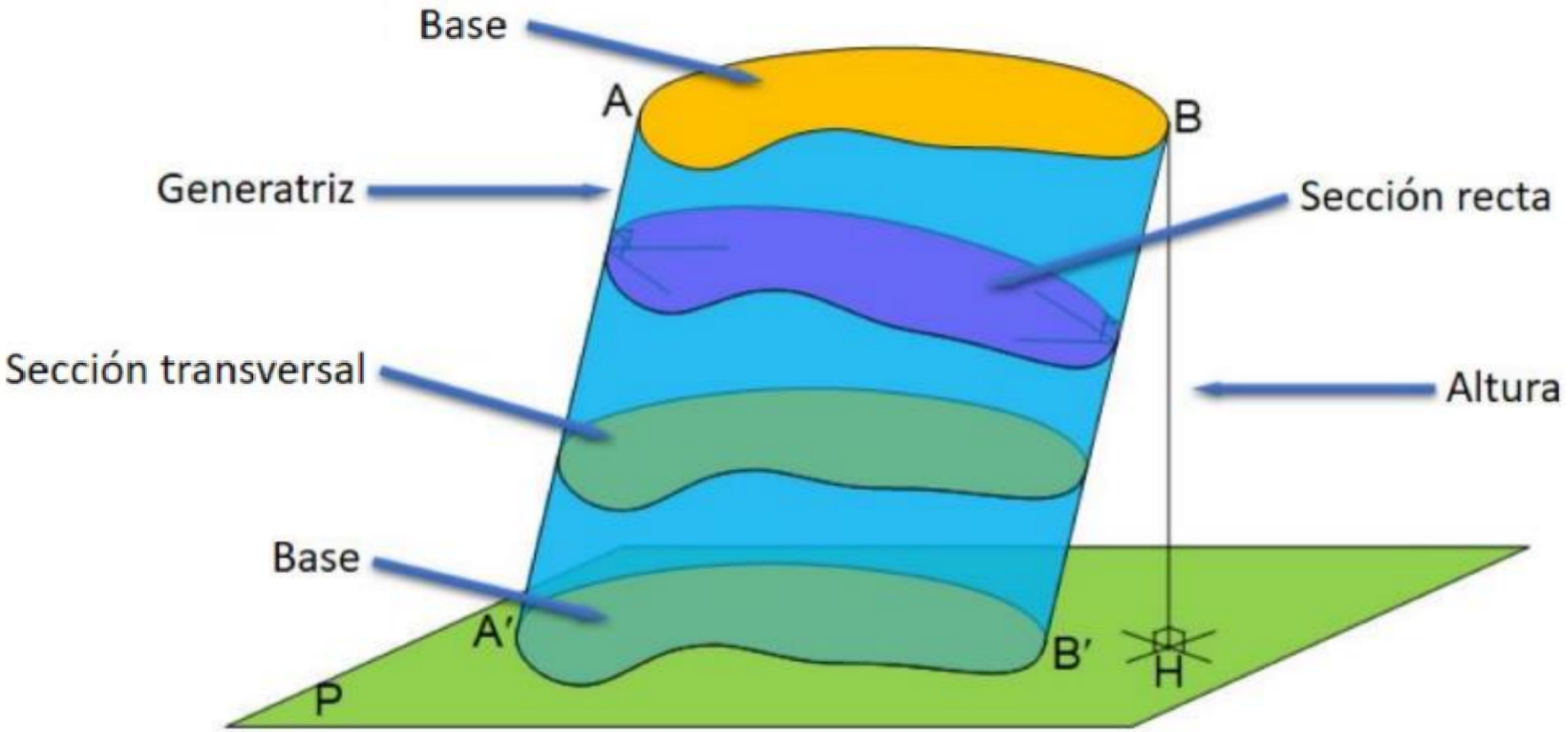
OBSERVACIÓN

Si la directriz es cerrada la superficie cilíndrica se denomina cerrada, en caso contrario se denomina abierta.

CILINDRO

CILINDRO

Definición.- Se denomina ***cilindro*** a la figura geométrica determinada por una superficie cilíndrica cerrada y dos planos paralelos entre sí, secantes a todas las generatrices de la superficie cilíndrica.

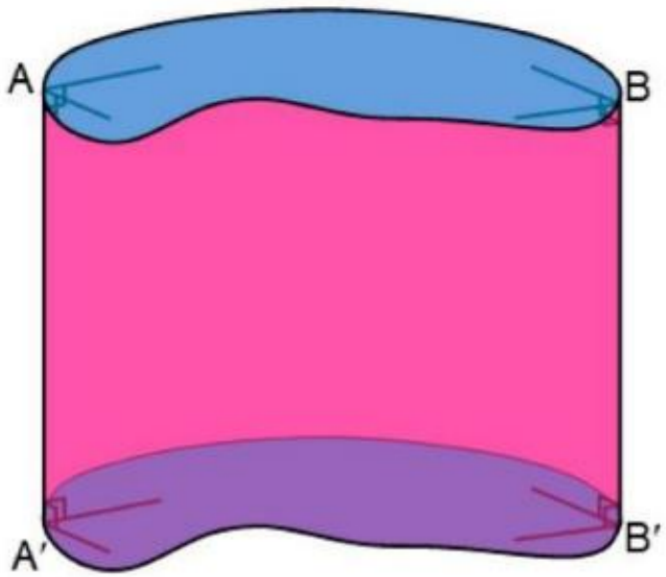


CILINDRO

CLASIFICACIÓN DE LOS CILINDROS

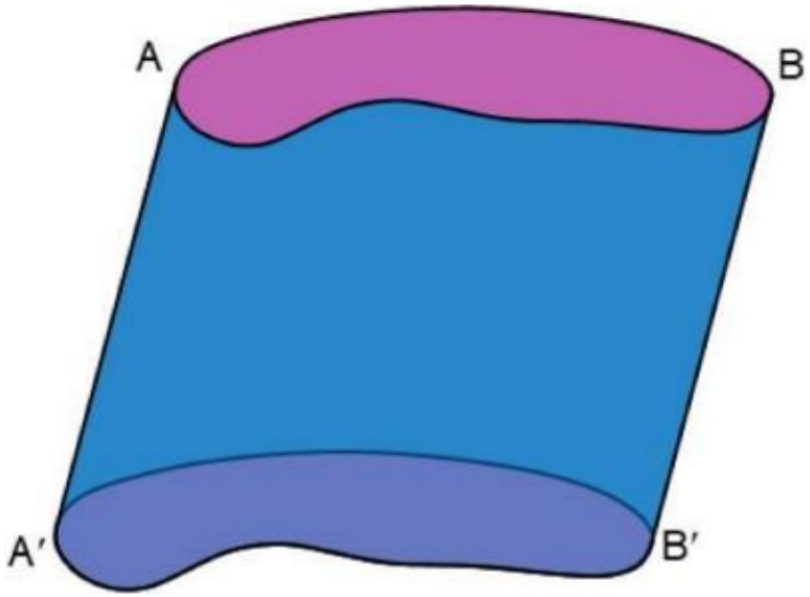
CILINDRO RECTO

Es el cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.



CILINDRO OBLICUO

Es el cilindro cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases.



CILINDRO

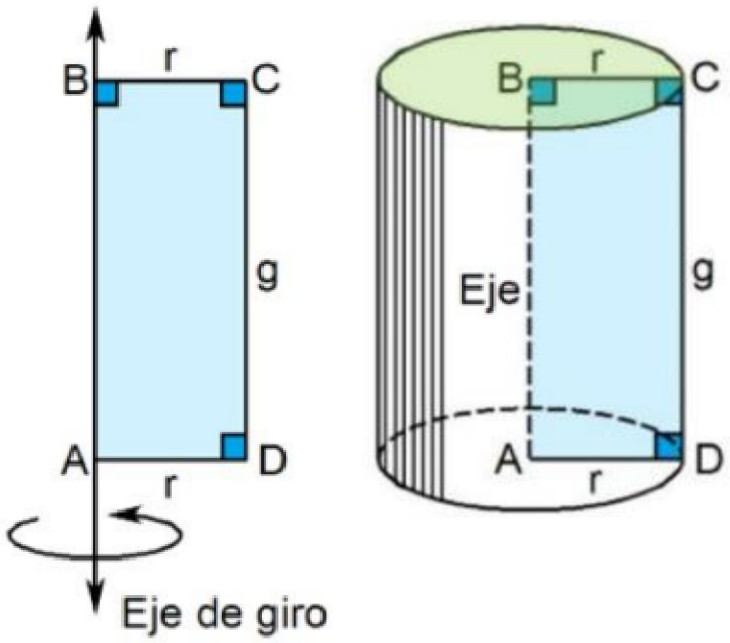
CILINDRO CIRCULAR RECTO O CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es la figura geométrica generada por la rotación de un rectángulo al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene a un lado del rectángulo.

Si el rectángulo ABCD rota alrededor de su lado $\overline{AB}$, entonces genera el cilindro representado en la figura.

El lado $\overline{AB}$ del rectángulo generador es el eje del cilindro, el lado opuesto $\overline{CD}$ es la generatriz (al girar determina la superficie lateral del cilindro) y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, que generan en su movimiento las bases del cilindro (círculos congruentes), son los radios de las bases del cilindro.

Se llama altura de un cilindro a la distancia entre las bases. En el cilindro de revolución la altura es congruente con la generatriz.



$$S_{LATERAL} = (2\pi r)g$$

$$S_{TOTAL} = 2\pi r(g + r)$$

$$V_{CILINDRO} = \pi r^2 g$$

□ABCD: Rectángulo generador

CILINDRO

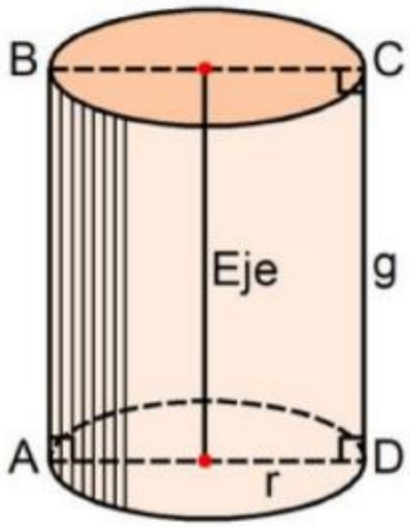
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CILINDRO DE REVOLUCIÓN

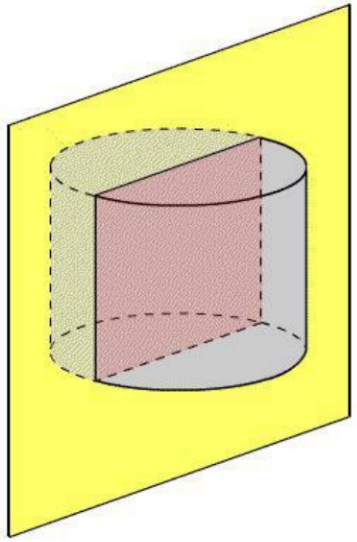
El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es una región rectangular de modo que uno de sus lados es congruente con la altura del cilindro y el otro tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia de la base.

CILINDRO

SECCIÓN AXIAL DE UN CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es la sección determinada en el cilindro por un plano que contiene al eje. En un cilindro de revolución la sección axial es un rectángulo que tiene por lados el diámetro de la base y la generatriz del cilindro.





En la figura, el rectángulo ABCD es la sección axial del cilindro.

NOTA:

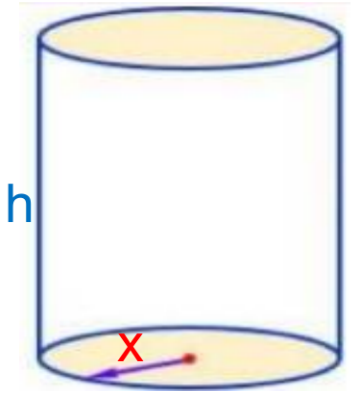
Se llama cilindro equilátero al cilindro circular recto cuya generatriz es congruente con el diámetro de la base.

EJEMPLOS

EJEMPLO:

¿Cuánto mide el radio de la base de un cilindro, sabiendo que su área lateral es numéricamente igual al doble del volumen?

A) 0,5 B) 0,75 C) 1
D) 1,25 E) 1,50



- Dato: $S_{(Lateral)} = 2(Volumen)$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cancel{\pi}x\cancel{h} = \cancel{2}(\cancel{\pi}x^2\cancel{h})$$

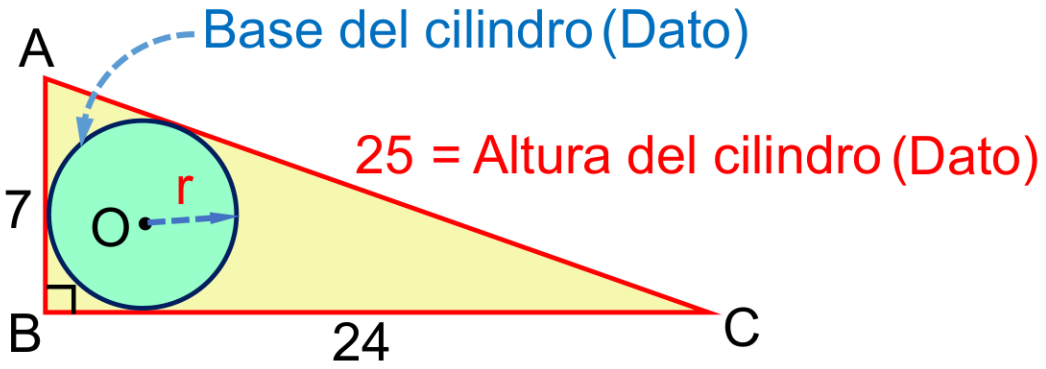
$$x = x^2$$

$$\therefore x = 1$$

EJEMPLO:

Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24. La circunferencia inscrita es la base de un cilindro de altura igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Calcular el volumen del cilindro

A) 215π B) 225π C) 220π
D) 230π E) 235π



- ΔABC: Teorema de Pitágoras ⇒ AC = 25
- ΔABC: Teorema de Poncelet ⇒ r = 3
- Volumen = $(\pi r^2)h$

$\Rightarrow$ Volumen = $(\pi 3^2)25$

$\therefore$ Volumen = 225π

EJEMPLO

EJEMPLO:

Se tiene un cilindro circular recto inscrito en un prisma triangular regular. Calcular la razón entre los volúmenes del cilindro y del prisma.

A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{3\pi}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

- Analizando las bases:

  $\Rightarrow$ ΔABC: Base del prisma regular (Triángulo Equilátero)

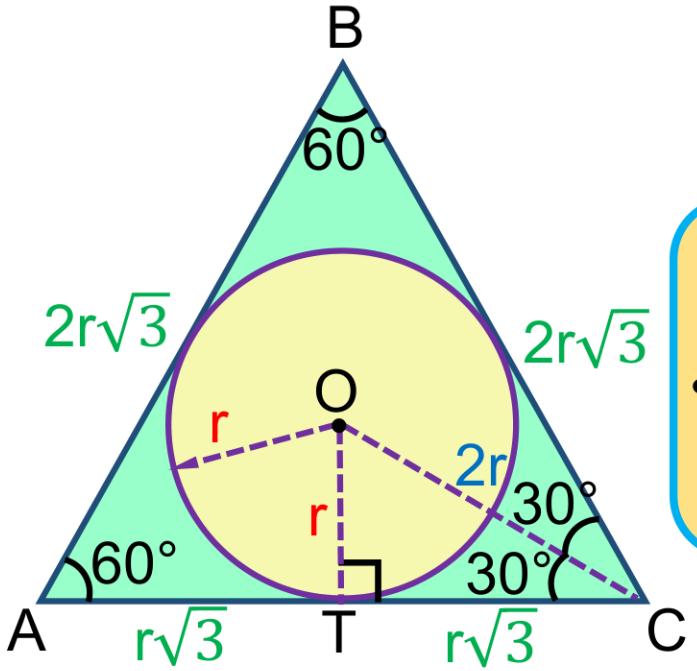
  $\Rightarrow$ Círculo de centro O: Base del cilindro

- ΔOTC: Notable de 30° y 60°

  $\Rightarrow TC = r\sqrt{3}$

- ΔABC: $AT = TC = r\sqrt{3}$

  $\Rightarrow AC = AB = BC = 2r\sqrt{3}$



- Calculando el área de las bases:

- $S_{◍} = \pi r^2$
- $S_{(\Delta ABC)} = \dfrac{(2r\sqrt{3})^2(\sqrt{3})}{4}$

$\Rightarrow S_{(\Delta ABC)} = 3\sqrt{3}r^2$

- Por dato, el cilindro está inscrito en el prisma, lo cual significa que ambos sólidos tienen alturas congruentes, por lo tanto, la razón de los volúmenes es igual a la razón entre las áreas de las bases.

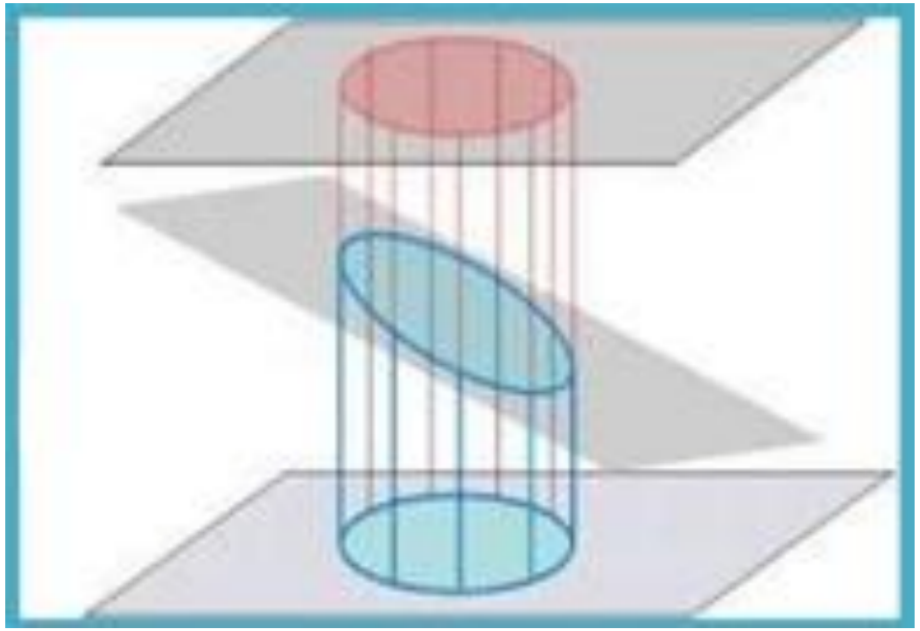
$$\Rightarrow \frac{V_{(CILINDRO)}}{V_{(PRISMA)}} = \frac{S_{◍}}{S_{(\Delta ABC)}} = \frac{\pi \cancel{r^2}}{3\sqrt{3}\cancel{r^2}}$$

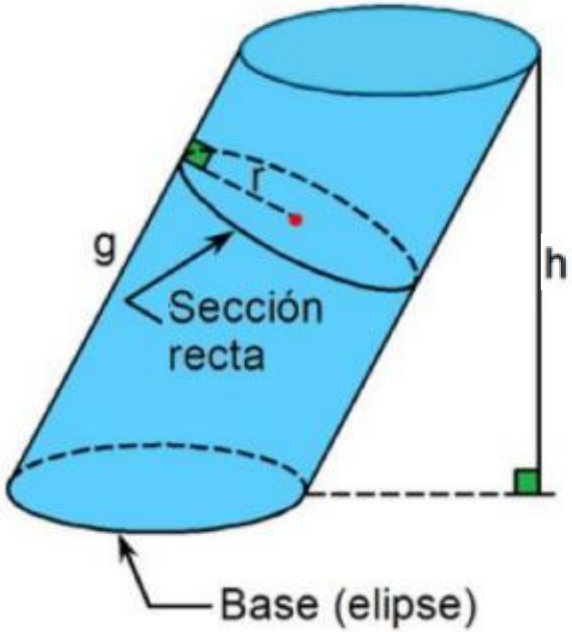
$$\therefore \frac{V_{(CILINDRO)}}{V_{(PRISMA)}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

CILINDRO

CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

Se denomina cilindro oblicuo de sección recta circular al cilindro determinado por un cilindro circular recto y dos planos paralelos entre si, secantes y no perpendiculares a todas las generatrices del cilindro circular recto.





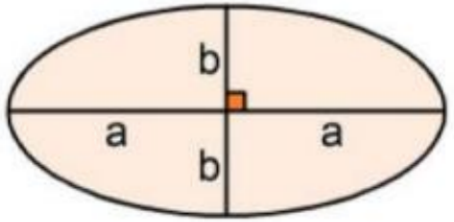
$$S_{LATERAL} = (2\pi r)g$$

$$S_{TOTAL} = S_{LATERAL} + 2(S_{BASE})$$

$$V_{CILINDRO} = \pi r^2 g$$

$$V_{CILINDRO} = (S_{BASE}).h$$

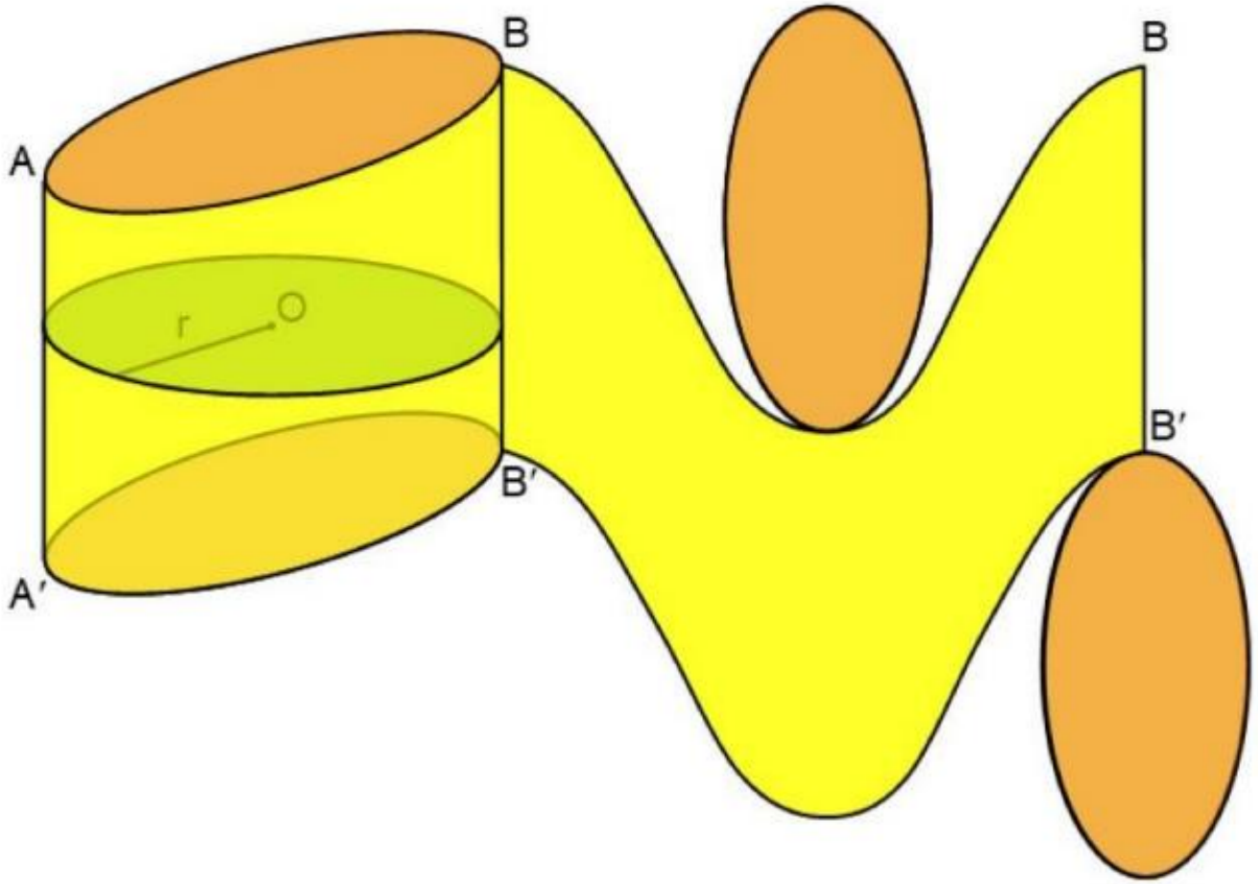
NOTA:



$$S_{ELIPSE} = \pi ab$$

CILINDRO

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UN CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR



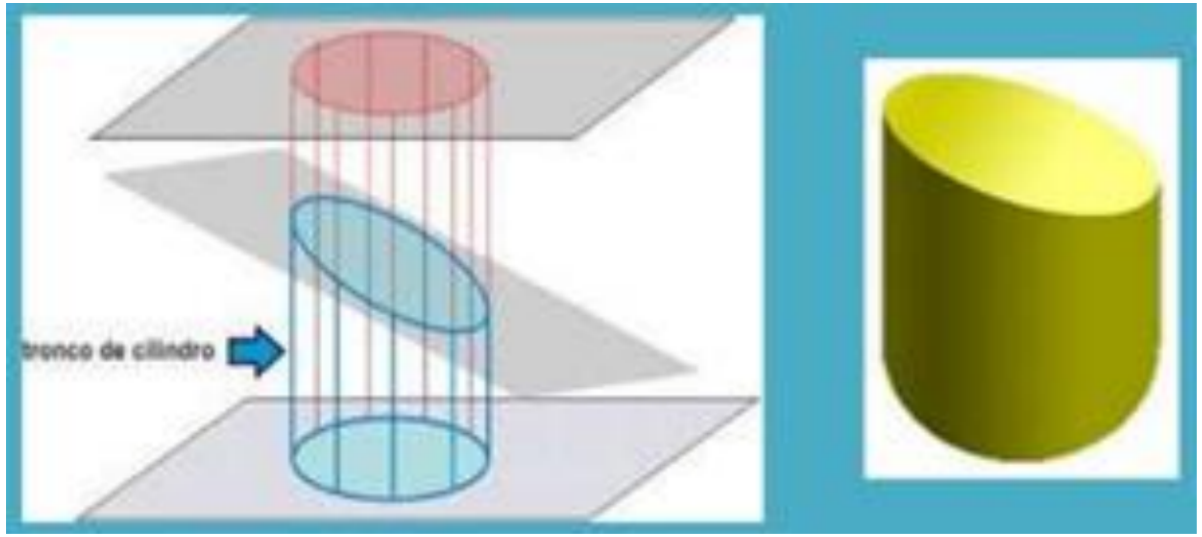
CILINDRO

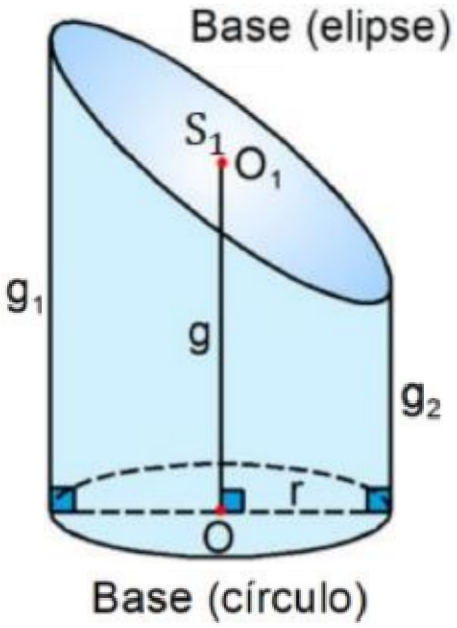
TRONCO DE CILINDRO

Se denomina tronco de cilindro a la figura geométrica determinada por un cilindro y un plano no paralelo a las bases del cilindro, secante a las generatrices del cilindro.

a) TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO

Es el tronco de cilindro determinado por un cilindro circular recto y un plano no paralelo a las bases secante a todas las generatrices del cilindro.





$$S_{LATERAL} = (2\pi r).g$$

$$S_{TOTAL} = (2\pi r).g + \pi r^2 + S_1$$

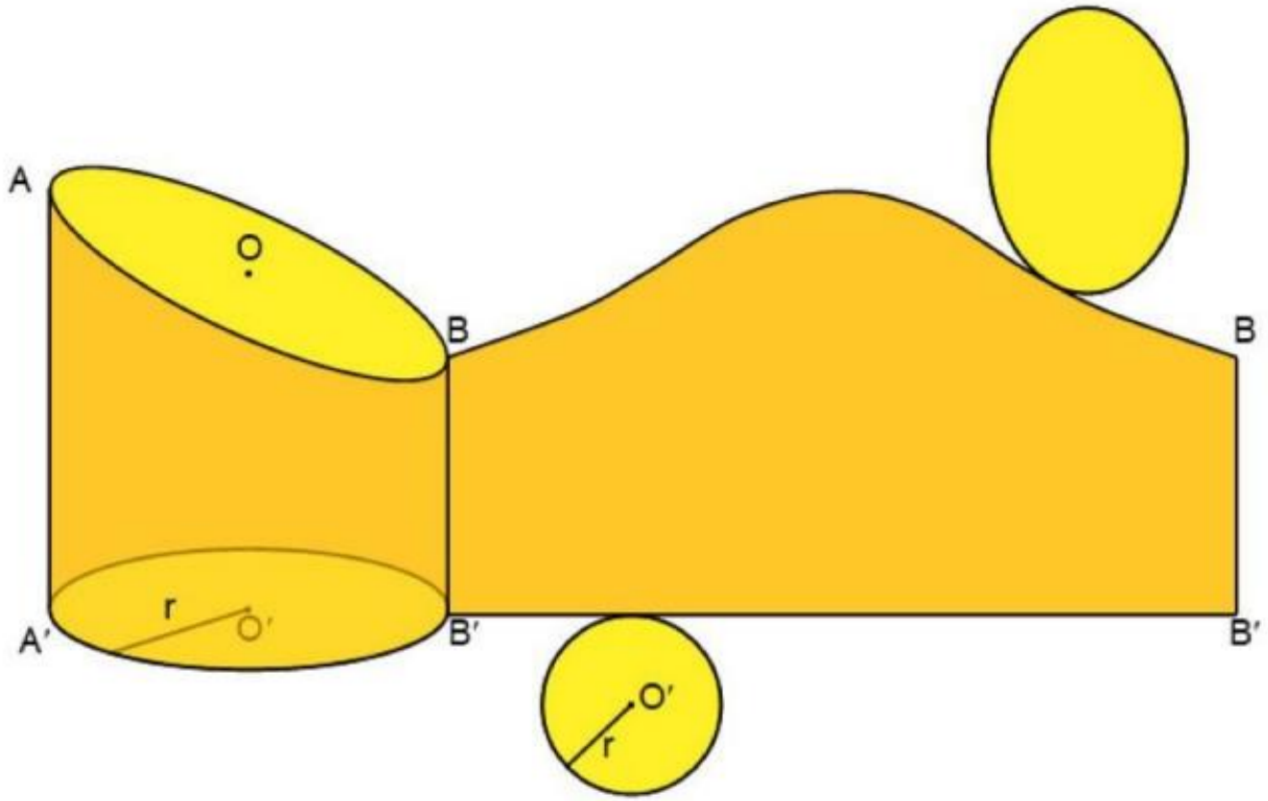
$$V_{TRONCO} = (\pi r^2).g$$

En la figura $\overline{OO_1}$ es el eje del tronco de cilindro, además:

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

CILINDRO

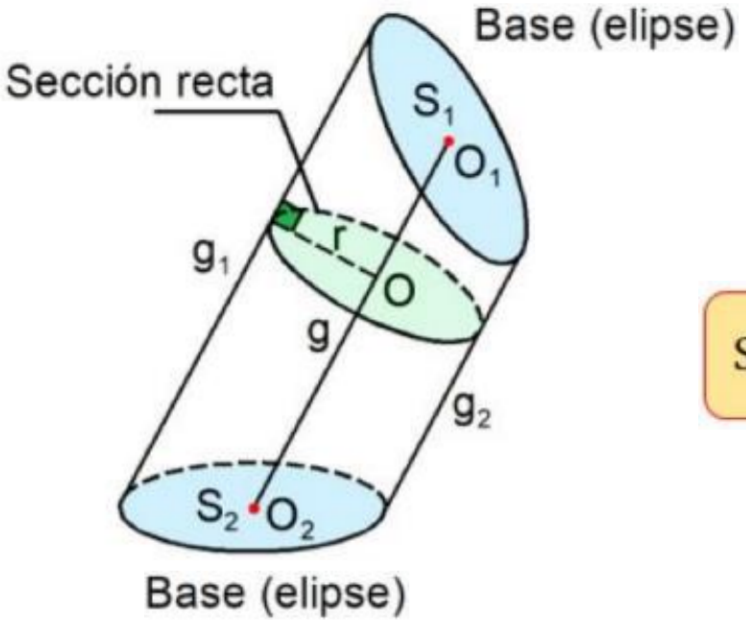
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UN TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO



CILINDRO

b) Tronco de cilindro oblicuo de sección recta circular

Es el tronco de cilindro determinado por un cilindro oblicuo de sección recta circular y un plano no paralelo a las bases secante a las generatrices del cilindro.



$$S_{LATERAL} = (2\pi r).g$$

$$S_{TOTAL} = (2\pi r).g + S_1 + S_2$$

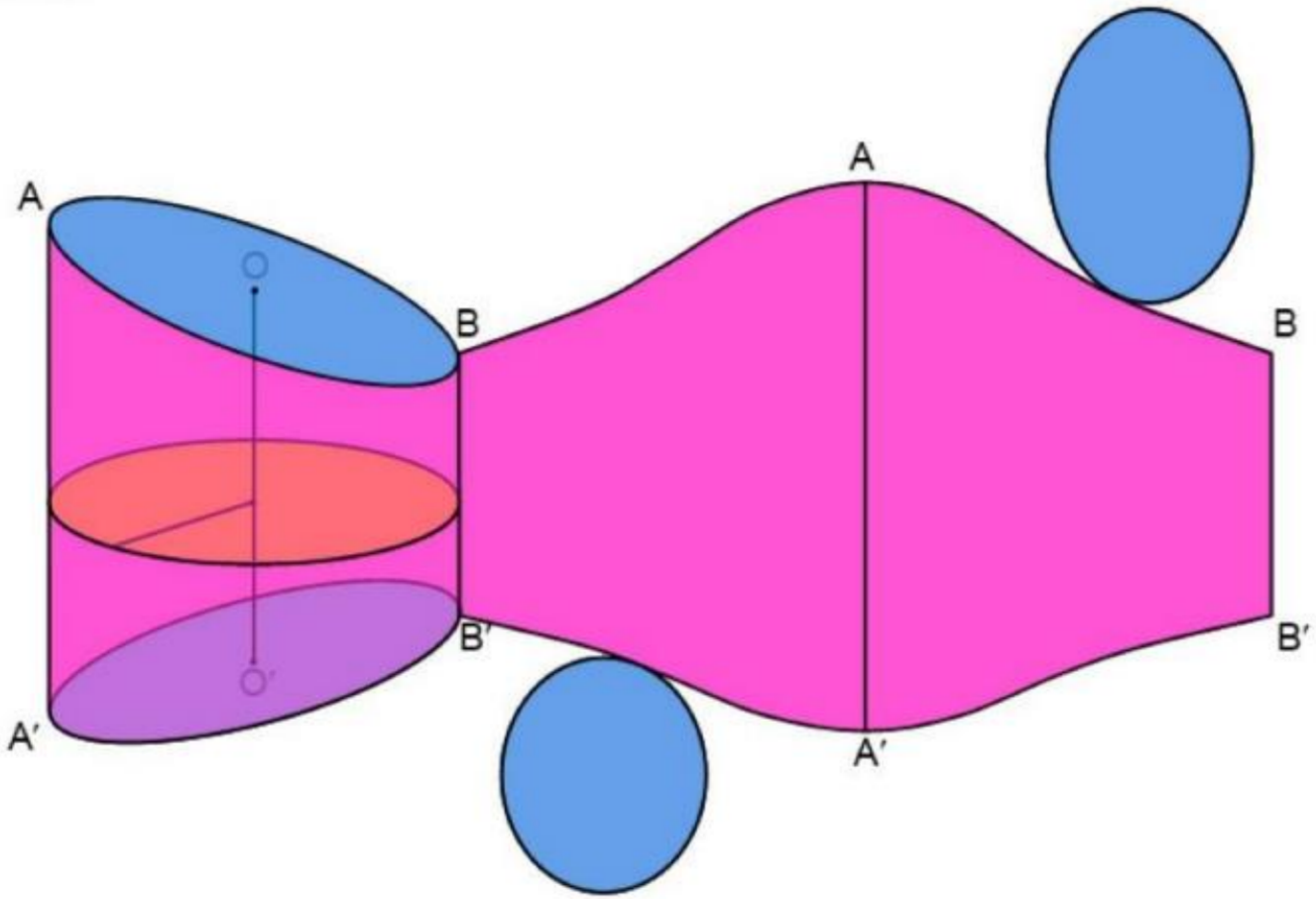
$$V_{TRONCO} = (\pi r^2).g$$

En la figura $\overline{O_1O_2}$ es el eje del tronco de cilindro, además:

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

CILINDRO

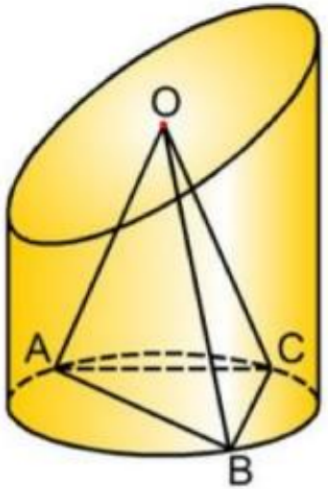
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UN TRONCO DE CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR



EJEMPLO

EJEMPLO:

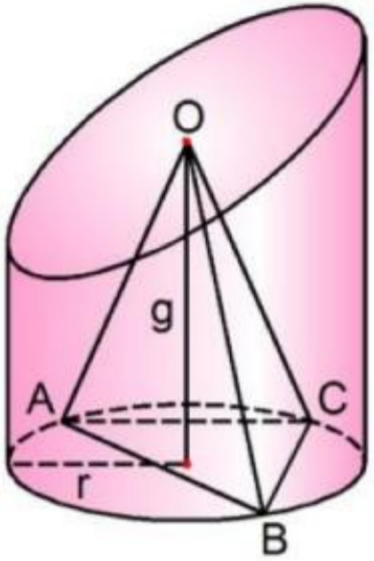
En la figura, O - ABC es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).



A) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

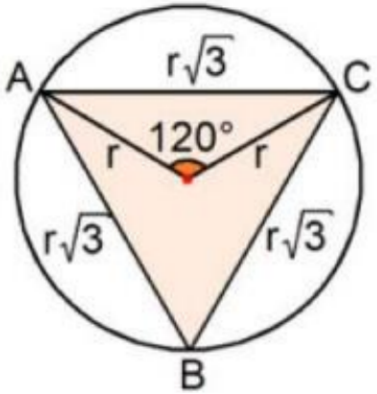
D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

RESOLUCIÓN:



Se pide: $x = \frac{V_{PIRÁMIDE}}{V_{TRONCO}}$

En la base podemos encontrar la razón entre el radio de la base del tronco de cilindro y la arista básica de la pirámide.



$AB = r\sqrt{3}$

Ahora podemos calcular lo que se pide, veamos:

$$x = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\cdot g}{\pi r^2 . g}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

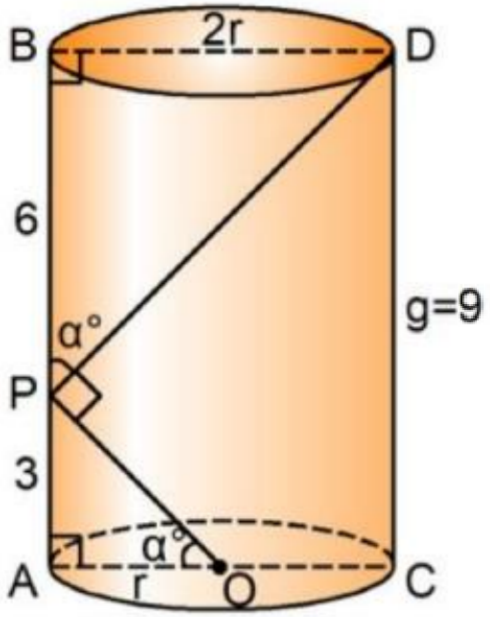
EJEMPLO

EJEMPLO:

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son generatrices diametralmente opuestas de un cilindro circular recto, P es un punto de $\overline{AB}$ tal que m∠OPD=90, BP=6 m y AP=3 m. Si O es punto medio del diámetro $\overline{AC}$, hallar el volumen (en m³) del cilindro.

A) 72 π B) 76 π C) 80 π
D) 81 π E) 82 π

RESOLUCIÓN:



Se pide: Volumen del cilindro = V

Colocando los datos en el gráfico, descubrimos que la generatriz del cilindro mide 9, ahora necesitamos calcular el radio.

Se observa:

$$\Delta OAP \sim \Delta PBD$$

$$\frac{3}{r} = \frac{2r}{6}$$

$$\rightarrow r = 3$$

Finalmente:

$$V = \pi 3^2 . 9$$

$$\therefore V = 81\pi$$

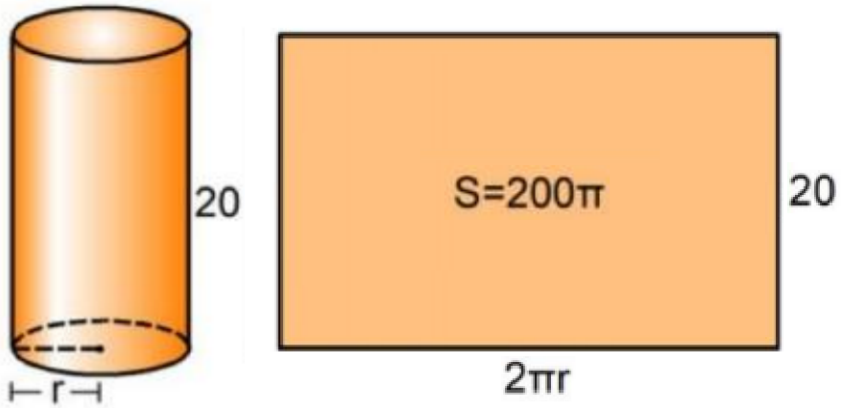
EJEMPLO

EJEMPLO:

Calcular el volumen de un cilindro de revolución, si su altura mide 20 y el desarrollo de la superficie lateral tiene por área 200 π.

A) 250 π B) 450 π C) 500 π
D) 550 π E) 600 π

RESOLUCIÓN:



Se pide: $V_{CILINDRO} = ?$

Por dato:

$$(2\pi r).20 = 200\pi$$

$$\rightarrow r = 5$$

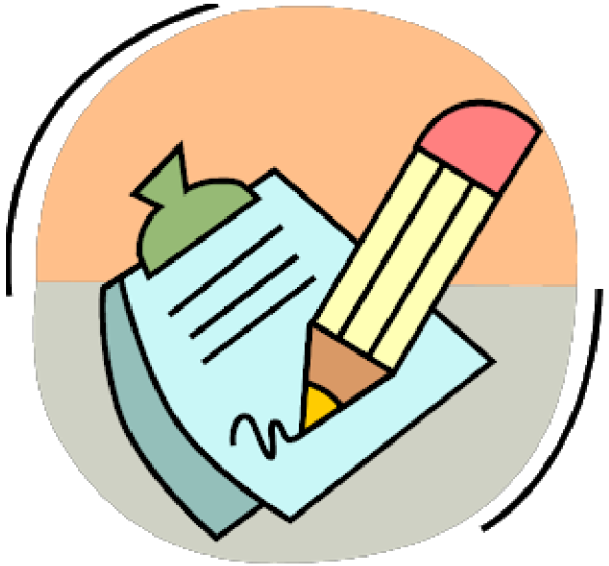
Para terminar, calculamos el volumen del cilindro:

$$V_{CILINDRO} = \pi 5^2 \times 20$$

$$\therefore V_{CILINDRO} = 500\pi$$

CILINDRO

MOMENTO DE PRACTICAR



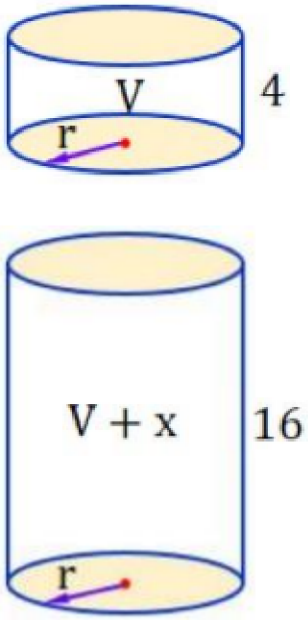
PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

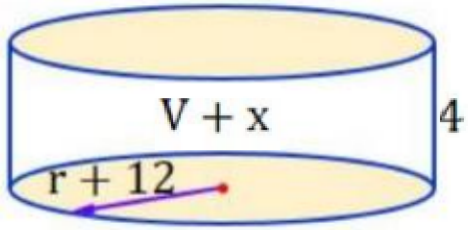
EJERCICIOS

01. Dado un cilindro circular recto cuya altura mide 4 m, si la altura aumenta en 12 m, el volumen aumenta en x metros cúbicos. Si el radio de la base del cilindro dado aumenta igualmente en 12 m, el volumen aumenta en x metros cúbicos. Hallar la longitud del radio de la base del cilindro dado.

A) 12 m B) 13 m C) 14 m
D) 15 m E) 11 m

RESOLUCIÓN:





Se pide: $r = ?$

Se observa:

$$V + x = \pi r^2 . 16 = \pi (r + 12)^2 . 4$$

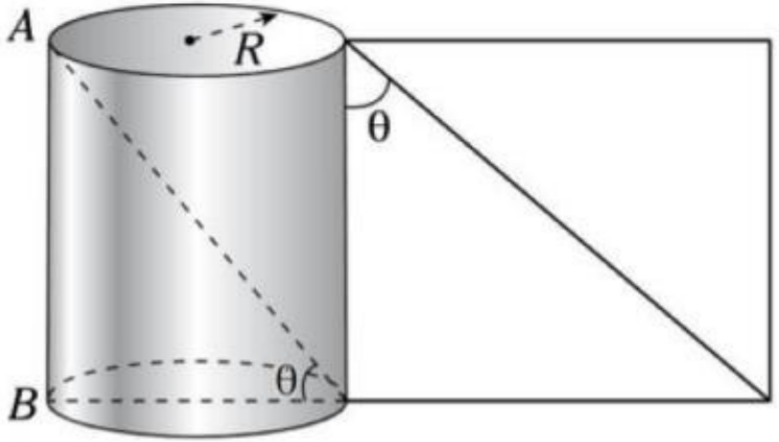
$$r^2 . 4 = (r + 12)^2$$

$$2r = r + 12$$

$$\therefore r = 12$$

EJERCICIOS

02. Se muestra un cilindro de revolución y el desarrollo de su superficie lateral, AB=6. Halle R.

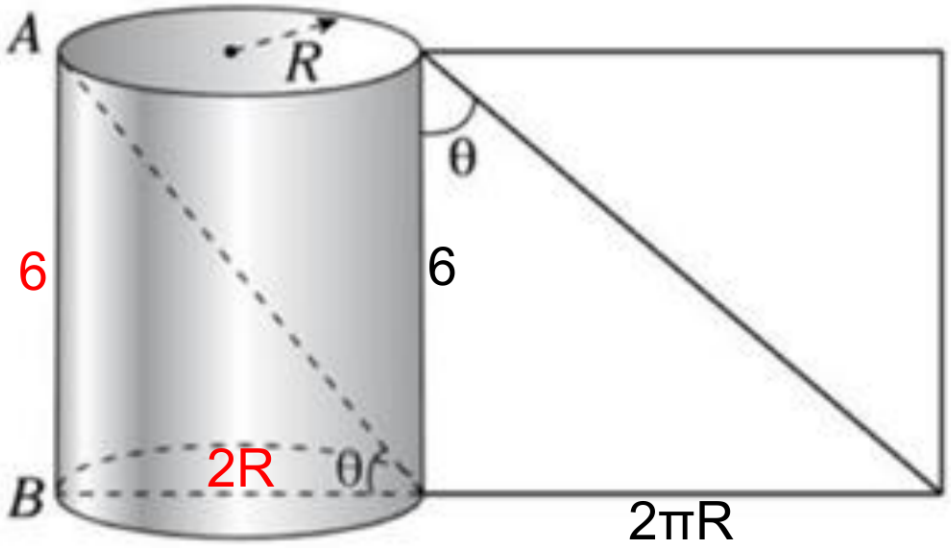


A) $\frac{\sqrt{\pi}}{3\pi}$ B) $\sqrt{3\pi}$ C) $\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$

D) $3\sqrt{\pi}$ E) $2\sqrt{3\pi}$

RESOLUCIÓN:

Se pide: $R = ?$



$$\tan\theta = \frac{6}{2R} = \frac{2\pi R}{6}$$

$$\pi R^2 = 9$$

$$\therefore R = \frac{3}{\sqrt{\pi}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$$

EJERCICIOS

03. La generatriz de un cilindro oblicuo de base circular mide igual que el diámetro del cilindro disminuido en 10 dm. Sean M y N los centros de las bases y $\overline{AB}$ un diámetro de la base inferior que contiene a N. Si AM=19 dm y MB=13 dm, entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $130\pi\sqrt{103}$ B) $131\pi\sqrt{104}$ C) $132\pi\sqrt{105}$
D) $133\pi\sqrt{106}$ E) $134\pi\sqrt{107}$ (UNI 2014-1)

RESOLUCIÓN:

Se pide: $V_{Cilindro} = ?$

Dato: $g = 2R - 10$

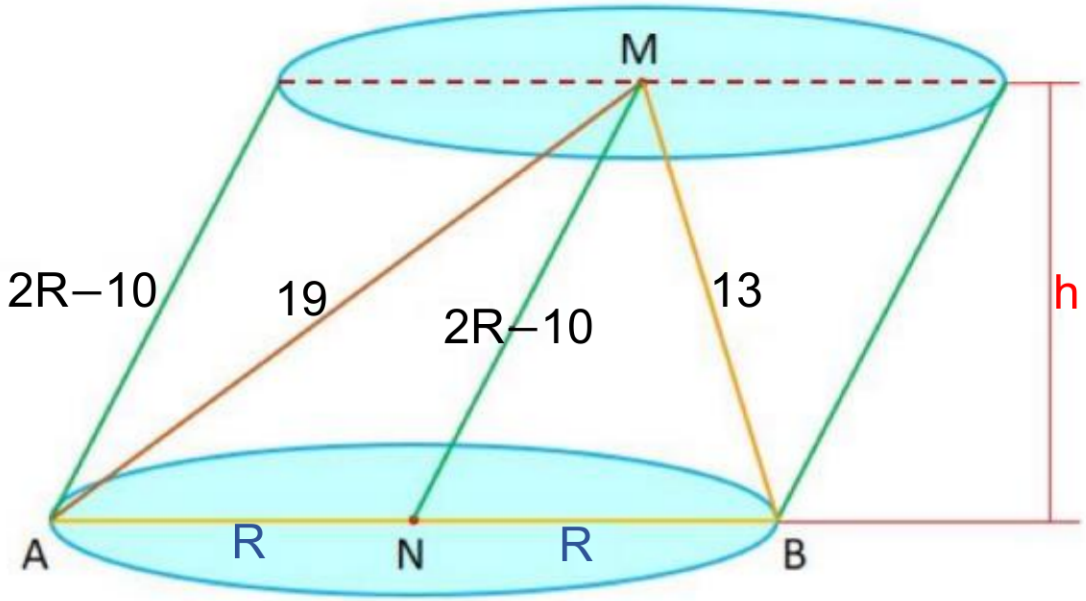
Por teorema de la mediana en ΔAMB:

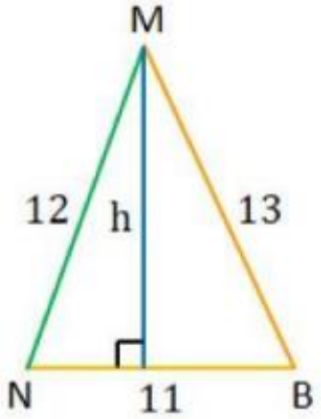
$$19^2 + 13^2 = 2(2R-10)^2 + \frac{(2R)^2}{2}$$

$$\rightarrow R = 11$$

Calculamos "h" por Herón en ΔNMB:

$$p = \frac{11+12+13}{2} = 18$$





$$h = \frac{2}{11}\sqrt{18(6)(5)(7)}$$

$$h = \frac{12}{11}\sqrt{105}$$

Por último:

$$V_{Cilindro} = \pi.11^2.\frac{12}{11}\sqrt{105}$$

$$\therefore V_{Cilindro} = 132\pi\sqrt{105}$$

EJERCICIOS

04. Un tronco de cilindro circular recto está circunscrito a una esfera. Si las generatrices, máxima y mínima del tronco, miden 20 y 5, calcular el volumen del tronco.

A) 120 π B) 150 π C) 200 π
D) 240 π E) 250 π

RESOLUCIÓN:

Se pide: $V_{Tronco} = ?$

Por Pithot: $a + 2r = 20 + 5$

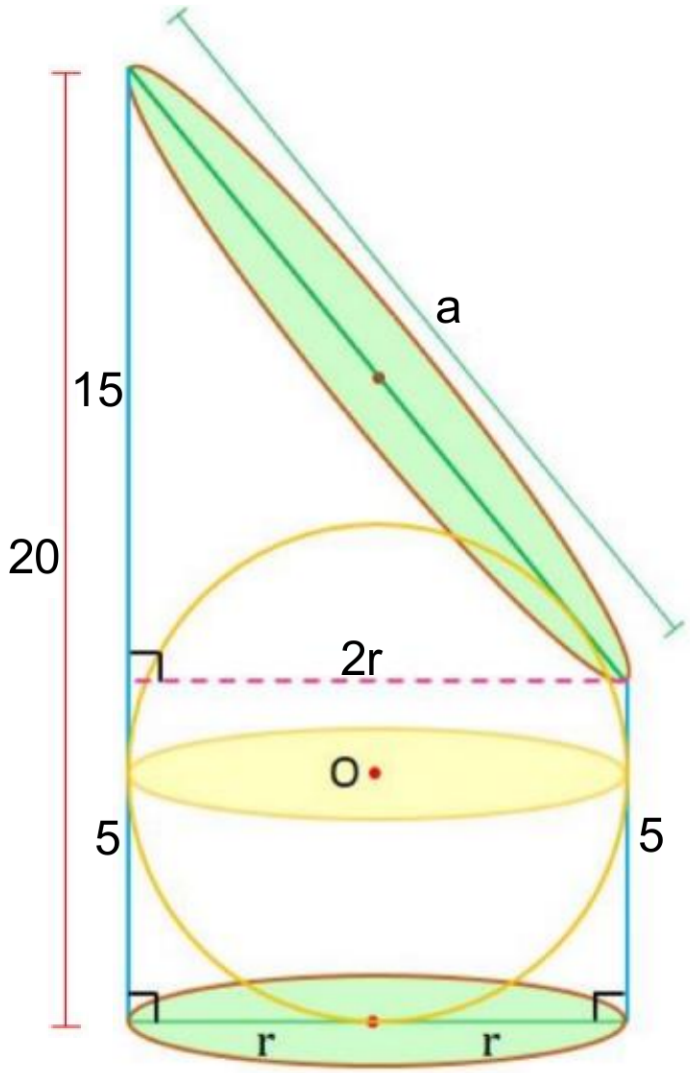
$\rightarrow a = 25 - 2r$

Por Pitágoras:

$$15^2 + (2r)^2 = a^2$$

$$15^2 + (2r)^2 = (25 - 2r)^2$$

$$\rightarrow r = 4$$



Finalmente, se pide:

$$V_{Tronco} = \pi r^2 g$$

$$V_{Tronco} = \pi 4^2 \left(\frac{20+5}{2}\right)$$

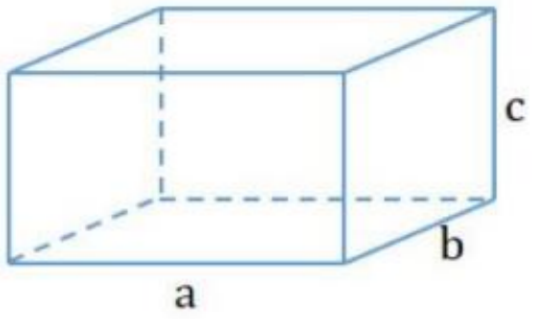
$$\therefore V_{Tronco} = 200\pi$$

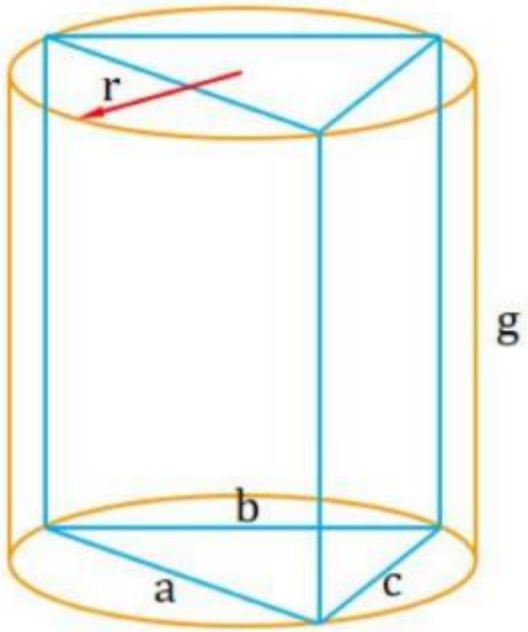
EJERCICIOS

05. Un rectoedro es equivalente a un prisma triangular inscrito en un cilindro de revolución. Si las dimensiones del rectoedro son congruentes a las aristas básicas del prisma y el área de la superficie total del cilindro es numéricamente igual a su volumen, calcule el radio de la base del cilindro.

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 1,5
D) 4 E) 2,5

RESOLUCIÓN:





Se pide: $r = ?$

Dato: $V_{Rectoedro} = V_{Prisma}$

$$S_{T(Cilindro)} = V_{Cilindro}$$

En el primer dato:

$$V_{Rectoedro} = V_{Prisma}$$

$$abc = \left(\frac{abc}{4r}\right) g$$

$$\rightarrow g = 4r$$

Ahora, en el cilindro:

$$S_{T(Cilindro)} = V_{Cilindro}$$

$$2\pi r(4r + r) = \pi r^2 . 4r$$

$$\therefore r = 2{,}5$$

EJERCICIOS

06. En un cilindro inscrito en un prisma ABC–DEF de caras regulares, M es el punto medio de $\overline{ED}$, $\overline{CM}$ interseca a la superficie lateral del cilindro en N. Si MN=$2\sqrt{7}$ m, calcule el volumen del cilindro.

A) 6π m^3 B) 9π m^3 C) 18π m^3
D) 24π m^3 E) 30π m^3

RESOLUCIÓN:

Se pide: $V_{Cilindro} = ?$

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 g$$

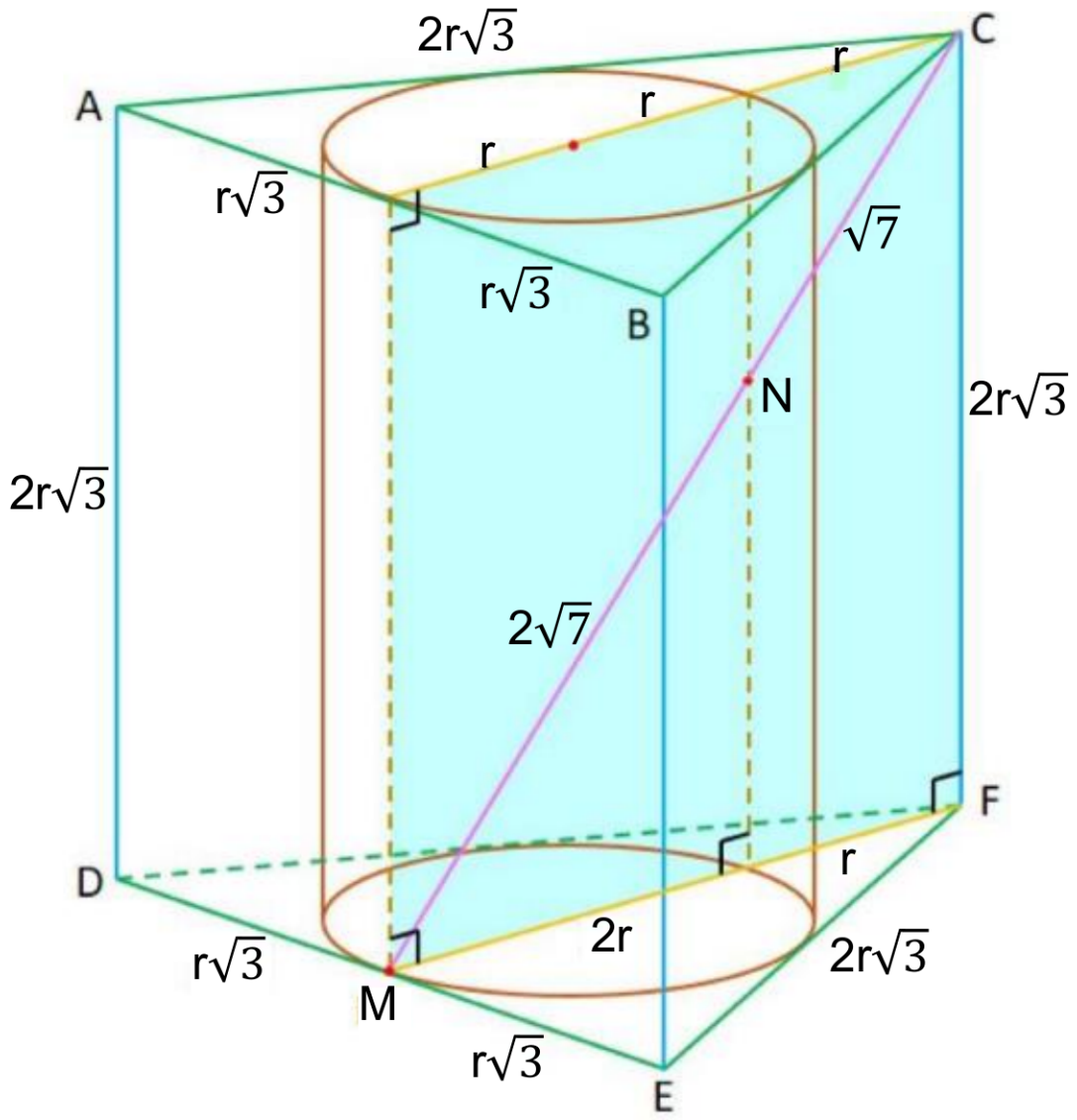
En ΔCFM: $(2r\sqrt{3})^2 + (3r)^2 = (3\sqrt{7})^2$

$$\rightarrow r = \sqrt{3}$$

Finalmente:

$$V_{Cilindro} = \pi(\sqrt{3})^2 . 6$$

$$\therefore V_{Cilindro} = 18\pi$$



EJERCICIOS

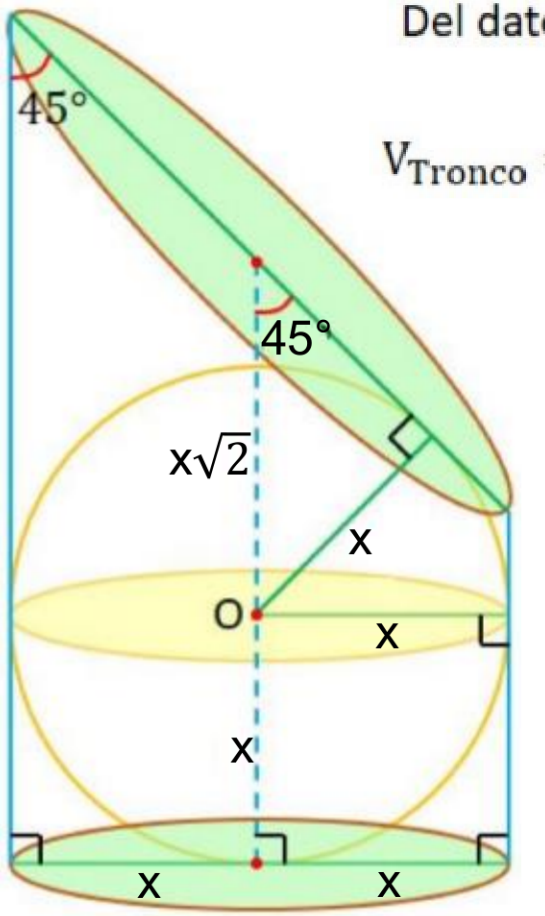
07. Se tiene una esfera inscrita en un tronco de cilindro circular recto. Si el volumen de la región encerrada por el tronco es numéricamente igual a $(\sqrt{2}+1)\pi$ y el ángulo que forma la base superior del tronco con su máxima generatriz es 45°, entonces el radio de la esfera es:

A) 1/2 B) 1 C) 3/2
D) 2 E) 5/2 (EX ADM UNI 2008-2)

RESOLUCIÓN:

Se pide: Radio de la esfera $= x$

Dato: $V_{Tronco} = (\sqrt{2}+1)\pi$



Del dato:

$$V_{Tronco} = \pi x^2(x\sqrt{2}+x) = (\sqrt{2}+1)\pi$$

$$x^3(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore x = 1$$

EJERCICIOS

08. Calcular el área de la superficie lateral de un tronco de cilindro oblicuo, cuyas bases son congruentes y perpendiculares, si se cumple que la diferencia de cuadrados de sus generatrices, máxima y mínima, es igual a 100 u^2.

A) $15\pi\ u^3$ B) $25\pi\ u^3$ C) $50\pi\ u^3$
D) $75\pi\ u^3$ E) $100\pi\ u^3$

RESOLUCIÓN:

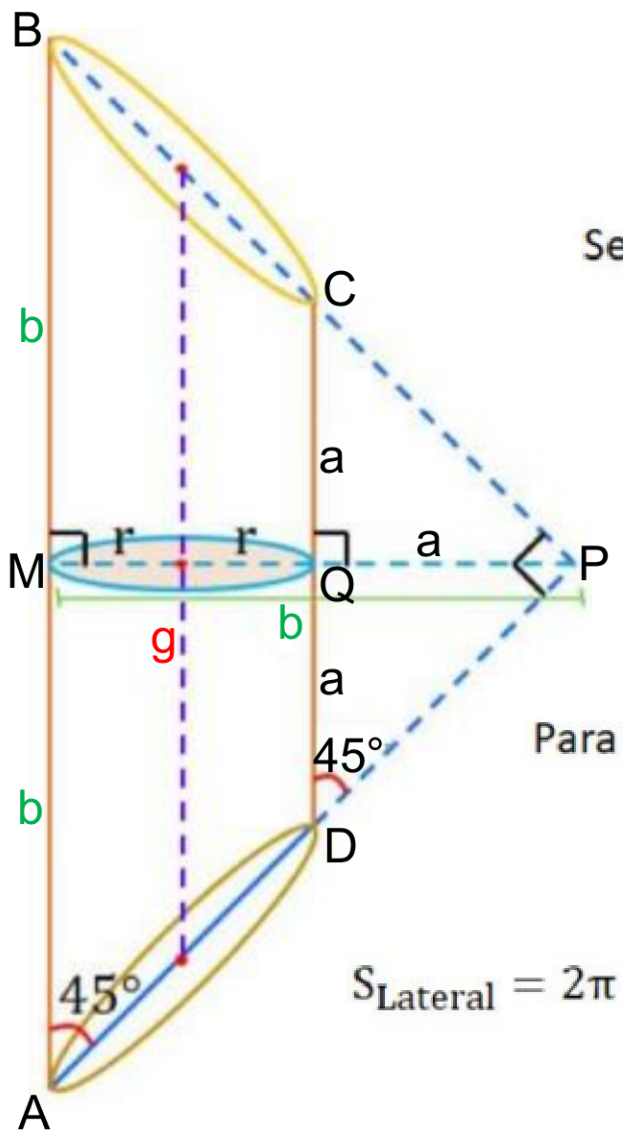
Se pide: $S_{Lateral} = ?$

Dato: $(g_{Máxima})^2 - (g_{Mínima})^2 = 100$

En el dato:

$$(2b)^2 - (2a)^2 = 100$$

$$b^2 - a^2 = 25$$



Se observa:

$$r = \frac{b-a}{2}$$

$$\wedge\ g = b + a$$

Para terminar:

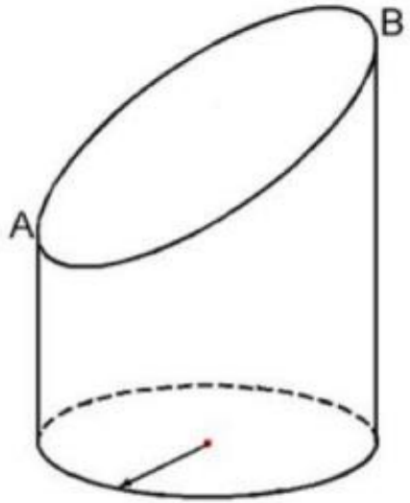
$$S_{Lateral} = 2\pi r g$$

$$S_{Lateral} = 2\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)(b+a) = \pi(b^2 - a^2)$$

$$\therefore S_{Lateral} = 25\pi$$

EJERCICIOS

09. En la figura se muestra un tronco de cilindro de revolución, cuyo eje mide 2π cm y el radio de su base mide 3 cm. Calcule la longitud del menor recorrido para ir de A hasta B, a través de la superficie lateral y tocando un solo punto de la base.



A) 5π B) 6π C) 8π
D) 9π E) 10π

RESOLUCIÓN:

10. Dos troncos de cilindros oblicuos de sección recta circular tienen en común una de sus bases, mientras que las otras bases están situadas en un mismo plano tal que las generatrices mayores son perpendiculares y el extremo común de las generatrices menores es el incentro del triángulo que tiene por vértices a los extremos de las generatrices mayores Si el ángulo entre una generatriz mayor de uno de los troncos de cilindro y el plano mide 15 y la distancia entre los extremos no comunes de las generatrices menores es 8, entonces la suma de los volúmenes de los sólidos determinados por los troncos de cilindros oblicuos es:

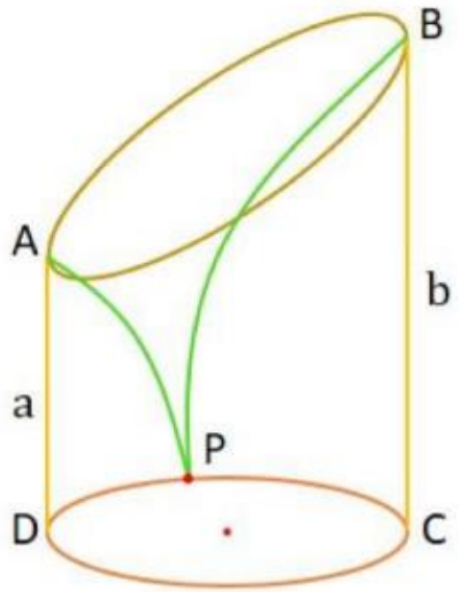
A) $2\pi(2\sqrt{6}+3)$ B) $2\pi(2\sqrt{6}-3)$ C) $6\pi(2\sqrt{6}+3)$
D) $10\pi(2\sqrt{6}-3)$ E) $10\pi(2\sqrt{6}+3)$

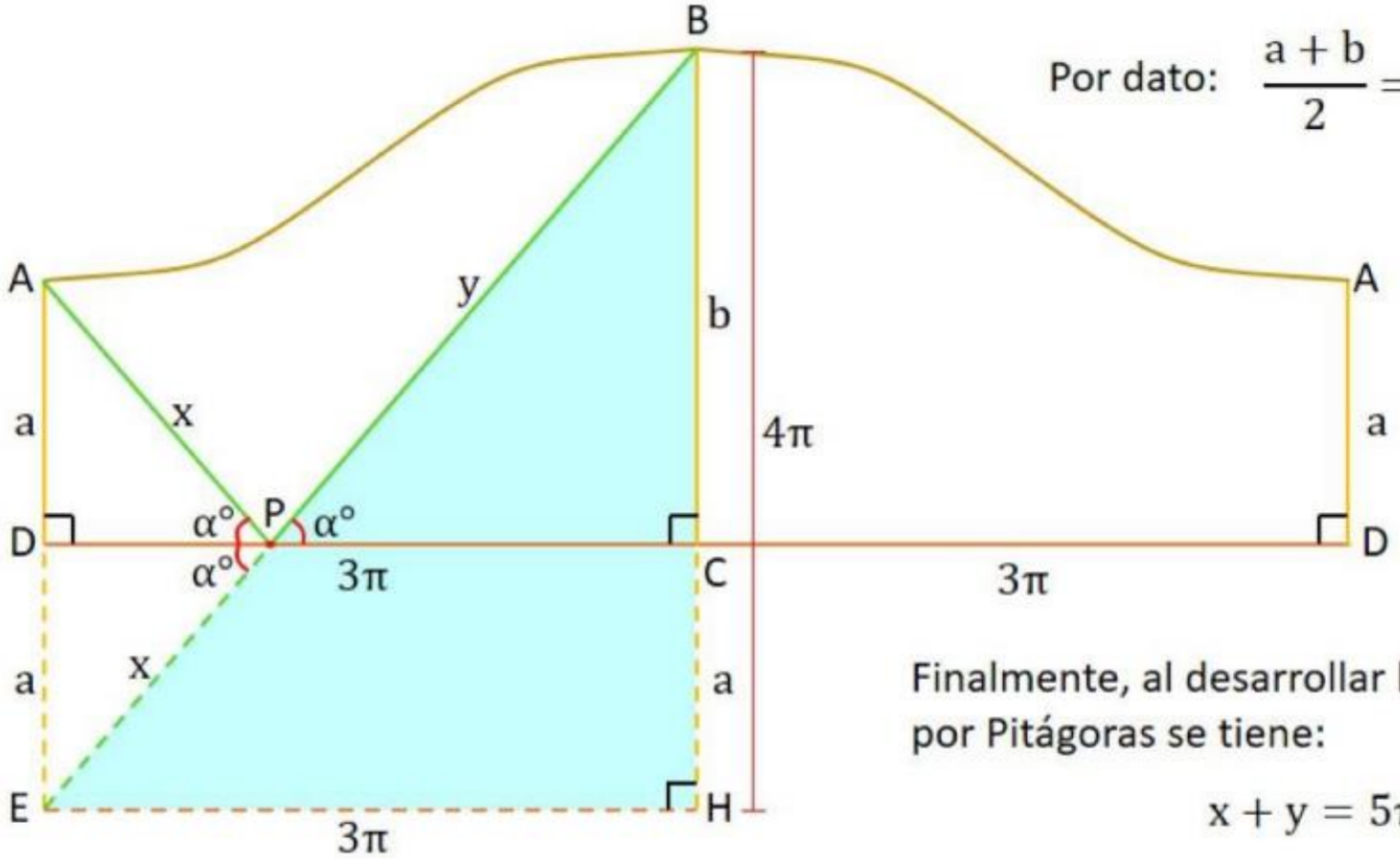
RESOLUCIÓN:

RESOLUCIÓN 09:

Se pide: $L_{APB} = x + y$

Dato: $Eje_{Cilindro} = 2\pi$ y $r = 3$





Por dato: $\dfrac{a+b}{2} = 2\pi \rightarrow a + b = 4\pi$

Además:

$L_{\odot} = 2\pi . 3$

$\rightarrow L_{\widehat{DC}} = 3\pi$

Finalmente, al desarrollar la superficie lateral, por Pitágoras se tiene:

$$x + y = 5\pi$$

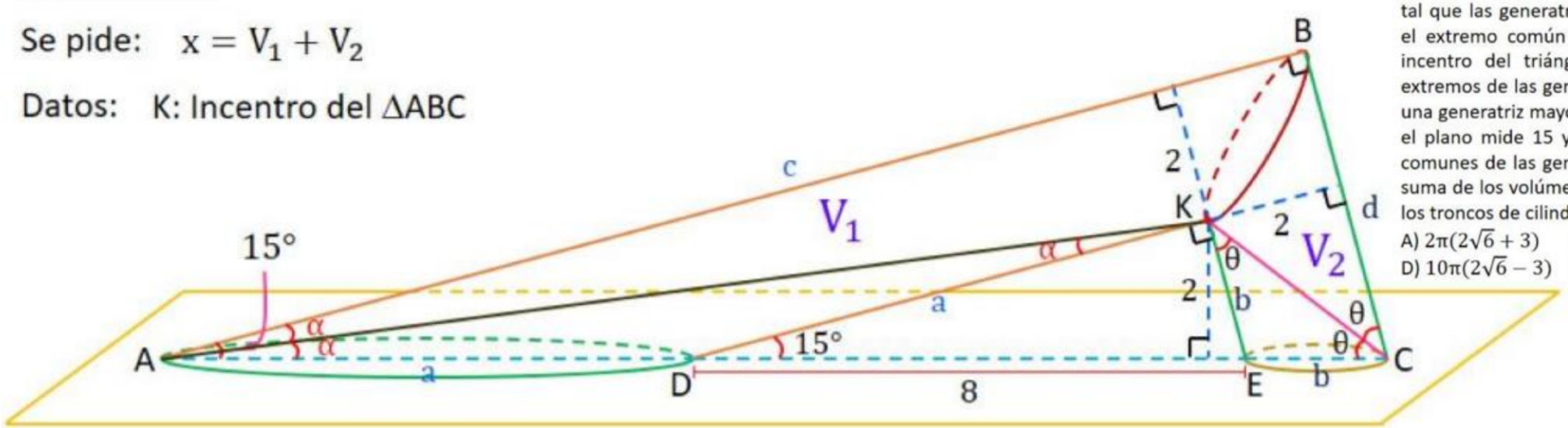
10. Dos troncos de cilindros oblicuos de sección recta circular tienen en común una de sus bases, mientras que las otras bases están situadas en un mismo plano tal que las generatrices mayores son perpendiculares y el extremo común de las generatrices menores es el incentro del triángulo que tiene por vértices a los extremos de las generatrices mayores Si el ángulo entre una generatriz mayor de uno de los troncos de cilindro y el plano mide 15 y la distancia entre los extremos no comunes de las generatrices menores es 8, entonces la suma de los volúmenes de los sólidos determinados por los troncos de cilindros oblicuos es:

A) $2\pi(2\sqrt{6}+3)$ B) $2\pi(2\sqrt{6}-3)$ C) $6\pi(2\sqrt{6}+3)$
D) $10\pi(2\sqrt{6}-3)$ E) $10\pi(2\sqrt{6}+3)$

RESOLUCIÓN 10:

Se pide: $x = V_1 + V_2$

Datos: K: Incentro del ΔABC



En ΔDKE: $b = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$a = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Por Poncelet en ΔABC:

$$c + d = (a + 8 + b) + 2(2)$$

$$\rightarrow c + d = 4\sqrt{6} + 12$$

Finalmente, calculamos lo pedido:

$$V_1 = \pi r^2 g = \pi(1)^2\left(\frac{c+a}{2}\right)$$

$$V_2 = \pi r^2 g = \pi(1)^2\left(\frac{b+d}{2}\right)$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{(4\sqrt{6}) + (4\sqrt{6}+12)}{2}\right)$$

$$\therefore V_1 + V_2 = 2\pi(2\sqrt{6}+3)$$

CLAVES

PARA EL ALUMNO:

01	02	03	04	05
B	C	C	A	A

06	07	08	09	10
C	A	B	E	B

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS